第 2 章　导数与微分

在科学研究与实际生活中，除了要了解变量之间的函数关系外，还需讨论因变量随自变量变化的变化量问题，以及因变量相对于自变量的变化率问题，这些问题归结到数学上，即为微分与导数的相关内容．本章以极限概念为基础，介绍导数概念、求导法则、基本求导公式及它们的计算方法，同时还讨论了微分的概念与计算方法等．

2.1　导数的概念

2.1.1　引例

例 2.1.1　变速直线运动的瞬时速度

已知　若质点做变速直线运动，它所移动的路程是时间的函数，这个方程记为：$s = s(t)$，求 t_0 时刻的瞬时速度 v_0．

设　$t: t_0 \to t_0 + \Delta t$，此时 $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$，从而平均速度

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t},$$

当 Δt 变化很小时，可以用 $\bar{v}$ 来近似表示 t_0 时刻的瞬时速度，并且若 Δt 越小，则近似程度越高，因此有

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}.$$

例 2.1.2　产品总成本的变化率．

设某产品的成本 C 是产量 Q 的函数，即 $C = C(Q)$（$Q > 0$），如果产量由 Q_0 变化到 $Q_0 + \Delta Q$，总成本取得相应的改变量记为 ΔC，则

$$\frac{\Delta C}{\Delta Q} = \frac{C(Q_0 + \Delta Q) - C(Q_0)}{\Delta Q},$$

此表达式表示该产品产量由 Q_0 变到 $Q_0 + \Delta Q$ 时，总成本的平均变化率．显然，ΔQ 越小，总成本的平均变化率就越接近于总成本在产量为 Q_0 时的变化率，当 $\Delta Q \to 0$ 时，如果极限

$$\lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{C(Q_0 + \Delta Q) - C(Q_0)}{\Delta Q}$$

存在，则这个极限值就表示产量为 Q_0 时总成本的变化率，经济学中称之为边际成本．

例 2.1.3 求平面曲线的切线斜率.

设一曲线方程为 $y=f(x)$，求曲线上任一点处的切线斜率.

在曲线 $y=f(x)$ 上任取两点 M，N，来作割线 MN. 若让点 N 沿着曲线趋向点 M，则割线 MN 的极限位置 MT 就称为曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线. 如图 2.1 所示，下面求曲线 $y=f(x)$ 在点 M 处的切线的斜率.

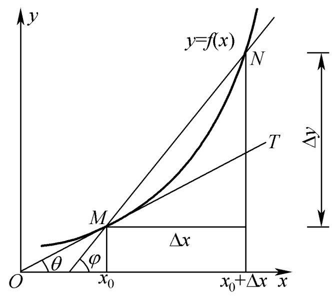


图 2.1

记曲线 $y=f(x)$ 上的点 M，N 的坐标分别为

$$(x_0,y_0)，\quad (x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)，$$

则割线 MN 的斜率表示为

$$k_{MN}=\tan\varphi=\frac{\Delta y}{\Delta x}，$$

这里 φ 为割线 MN 的倾角，θ 是切线 MT 的倾角，让点 N 沿曲线趋向于点 M，即 $\Delta x\to 0$ 时，若上式的极限存在，记为 k，则

$$\tan\theta=k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}，$$

此极限值 k 就是所求的切线的斜率，即

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

上面三个实际问题虽然具体含义不同，但从抽象的数量关系来看，他们的实质是一样的，都归结为求函数改变量与自变量改变量比值的极限问题. 这个极限称为函数在这一点的导数.

2.1.2 导数的概念

1. 导数的定义

定义 2.1.1 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在点 x_0 处取得增量 Δx（点 $x_0+\Delta x$ 也在该邻域内）时，相应因变量 y 取得增量为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} \qquad (2.1.1)$$

存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**导数**，记作

$$f'(x_0)，\quad y'\big|_{x=x_0}，\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0} \text{或} \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}，$$

即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

如果极限（2.1.1）不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处不可导.

若设 $x=x_0+\Delta x$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，有 $x\to x_0$，所以导数 $f'(x_0)$ 的定义也可表示为

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \qquad (2.1.2)$$

引入了导数的概念，前面讨论的三个实际问题就可简述如下：

（1）变速直线运动在 t_0 时刻的瞬时速度 v_0 就是路程函数 $s(t)$ 在 t_0 处的导数，即 $v_0=s'(t_0)$.

（2）产品在产量为 Q_0 时总成本的变化率（边际成本）就是成本函数 $C(Q)$ 在点 Q_0 处的导数.

（3）曲线 $y=f(x)$ 在点 $\left(x_0,f(x_0)\right)$ 处的切线斜率就是函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，即

$$k=\tan\theta=f'(x_0).$$

2．*左、右导数*

在导数 $f'(x_0)$ 的定义中，导数

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

是一个极限，在第 1 章中我们讨论过，极限存在的充要条件是左、右极限都存在且相等，因此导数 $f'(x_0)$ 存在的充要条件是左极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

和右极限

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

都存在且相等，这两个极限分别称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**左导数**和**右导数**，分别记作 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$，即

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}；$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

因此我们得到下面的定理.

定理 2.1.1 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导的充分必要条件是 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右导数都存在且相等.

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 (a,b) 内每一点都可导，则称 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内可导. 则任给 $x\in(a,b)$，都对应着 $f(x)$ 的一个确定的导数值 $f'(x)$，从而构成了一个新的函数，称此函数为函数 $f(x)$ 的**导函数**，记作 y'，$f'(x)$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

即

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是导函数 $f'(x)$ 在点 x_0 处的函数值，所以有

$$f'(x_0)=f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

因此，导函数也通常简称为导数.

例 2.1.4 求函数 $y=x^2$ 的导数.

解 由于 $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$，即

$$(x^2)'=2x.$$

同理 $(x^n)'=nx^{n-1}$（n 为正整数）.

特别地，当 $n=1$ 时，$(x)'=1$.

一般地，当指数为任意实数 μ 时，可以证明

$$(x^\mu)'=\mu x^{\mu-1}.$$

例如，函数 $y=\sqrt{x}$ 的导数：

$$y'=(\sqrt{x})'=(x^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

同理，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的导数.

$$y'=\left(\frac{1}{x}\right)=(x^{-1})'=(-1)x^{-1-1}=-\frac{1}{x^2}.$$

例 2.1.5 求指数函数 $y=a^x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$）.

解 由于 $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}=a^x\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta x\ln a}{\Delta x}=a^x\ln a$，即

$$(a^x)'=a^x\ln a .$$

特别地，在上式中令 $a=\mathrm{e}$，可得指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的导数：

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x .$$

例 2.1.6 求对数函数 $y=\log_a x$ 的导数（$a>0$，$a\neq 1$，$x>0$）.

解 由于 $\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{1}{x}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}=\dfrac{1}{x}\log_a \mathrm{e}=\dfrac{1}{x\ln a}$，即

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

特别地，在上式中若令 $a=\mathrm{e}$，可得自然对数函数 $y=\ln x$ 的导数：

$$(\ln x)'=\frac{1}{x} .$$

例 2.1.7 求函数 $y=\sin x$ 的导数.

解 由于 $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x=2\cos(x+\dfrac{\Delta x}{2})\sin\dfrac{\Delta x}{2}$，

所以 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{2\cos(x+\frac{\Delta x}{2})\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=\cos x$，即

$$(\sin x)'=\cos x .$$

同理可得 $(\cos x)'=-\sin x$.

2.1.3 导数的几何意义

函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 在几何上表示为曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率（如图 2.1 所示），即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\varphi\to\theta}\tan\varphi=\tan\theta=k .$$

过曲线上一点且垂直于该点处切线的直线，称为曲线在该点处的法线.

根据导数的几何意义，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0，f(x_0))$ 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0) ,$$

则法线方程为

$$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \quad（f'(x_0)\neq 0）.$$

注意： 若 $f'(x_0)=\infty$，则切线垂直于 x 轴，切线的方程就是 x 轴的垂线 $x=x_0$.

例 2.1.8 求曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 处的切线和法线方程.

解 因为 $y'=2x$，由导数几何意义可知，曲线 $y=x^2$ 在点 $(1,1)$ 的切线与法线的斜率分别为

$$k_1=y'\big|_{x=1}=2,$$

$$k_2=-\frac{1}{k_1}=-\frac{1}{2},$$

于是所求的切线方程为

$$y-1=2(x-1),$$

即

$$2x-y-1=0.$$

法线方程为

$$y-1=-\frac{1}{2}(x-1),$$

即

$$x+2y-3=0.$$

2.1.4 可导与连续的关系

定理 2.1.2 如果函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 处一定连续.

证明 因 $f(x)$ 在点 x_0 处可导，则

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

根据函数极限与无穷小之间的关系，可知

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha,$$

其中 α 是当 $\Delta x\to 0$ 时的无穷小．两端同乘以 Δx，可得

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x,$$

由此可知

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}\left[f'(x_0)\Delta x+\alpha\cdot\Delta x\right]=0,$$

所以函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

上述定理的逆命题不一定成立，即在某点连续的函数，在该点处未必可导.

例 2.1.9 证明函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续但不可导（如图 2.2 所示）.

证明 因为

$$\Delta y=f(0+\Delta x)-f(0)=|0+\Delta x|-|0|=|\Delta x|,$$

则

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{\Delta x\to 0}|\Delta x|=0.$$

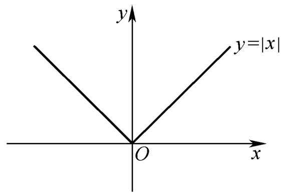


图 2.2

由连续定义可知，$y=|x|$ 在 $x=0$ 处连续.

又

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x},$$

所以，当 $\Delta x>0$ 时，函数在 $x=0$ 处的右导数为

$$f'_{+}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{+}}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1;$$

当 $\Delta x<0$ 时，函数在 $x=0$ 处的左导数为

$$f'_{-}(0)=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0^{-}}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

函数 $y=|x|$ 在 $x=0$ 处的左、右导数不相等，从而在 $x=0$ 点处不可导．由此可知，函数在某点连续只是函数在该点可导的必要条件，但非充分条件.

习题 2.1

1．求下列函数在指定点处的导数：

（1）$y=\cos x$，$x=\dfrac{\pi}{2}$；　　（2）$y=\ln x$，$x=5$.

2．求下列函数的导数：

（1）$y=\log_2 x$；　　（2）$y=\dfrac{x^2}{\sqrt{x^5}}$；

（3）$y=\sqrt[5]{x^2}$；　　（4）$y=\tan x$.

3．判断下列命题是否正确？为什么？

（1）如果 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处连续；

（2）如果 $f(x)$ 在 x_0 处连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处可导；

（3）如果 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，则 $f(x)$ 在 x_0 处不可导；

（4）如果 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处不连续.

4．下列各题中均假定 $f'(x_0)$ 存在，按导数定义观察下列极限：

（1）$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{2\Delta x}$；　　（2）$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{h}$.

5．求曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 在点(1,1)处的切线方程．

6．讨论下列函数在 $x=0$ 处是否连续、是否可导：

（1） $y=x^3|x|$； （2） $y=2|\sin x|$；

（3） $y=\begin{cases}x^3\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0;\end{cases}$ （4） $y=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

2.2 导数的运算

上一节介绍了导数的定义，并以此求出了一些简单函数的导数，但只由导数的定义求导往往非常繁琐，有时甚至是不可行的．能否找到求导的一般法则或常用的求导公式，使得求导更简单易行呢？本节将介绍这些求导法则，求导公式．

2.2.1 函数的和、差、积、商的求导法则

定理 2.2.1 若函数 $u=u(x)$ 与 $v=v(x)$ 在点 x 处均可导，那么它们的和、差、积、商（当分母不为零）在点 x 处也可导，且有以下法则：

（1） $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

（2） $(uv)'=u'v+uv'$；

若 $v=C$ （C 为常数），则 $(Cu)'=Cu'$；

（3） $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$．

注意：法则（2）表明乘积的导数不等于导数的乘积，法则（3）表明商的导数不等于导数的商．

下面我们给出法则（3）的证明，其余的留给读者自行证明．

证明 令 $y=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，给自变量 x 一个增量 Δx，则有

$$\Delta y=\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}=\frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\frac{u(x)}{v(x)}$$

$$=\frac{v(x)\Delta u-u(x)\Delta v}{[v(x)+\Delta v]v(x)},$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{[v(x)+\Delta v]v(x)}\left[\frac{\Delta u}{\Delta x}v(x)-\frac{\Delta v}{\Delta x}u(x)\right].$$

因 $u(x)$, $v(x)$ 在点 x 处可导，则在该点处必连续，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，$\Delta v\to 0$；又当 $\Delta x\to 0$ 时，$\dfrac{\Delta u}{\Delta x}\to u'(x)$，$\dfrac{\Delta v}{\Delta x}\to v'(x)$, 所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}.$$

特别地，若 $u(x)=1$ ，则可得

$$\left(\frac{1}{v}\right)'=\frac{-v'}{v^2} \qquad （v\neq 0）.$$

法则（1），（2）均可推广到有限个可导函数的情形.

设 $u=u(x)$，$v=v(x)$，$w=w(x)$ 在点 x 处均可导，则

$$(u\pm v\pm w)'=u'\pm v'\pm w'.$$

$$(uvw)'=[(uv)w]'=(uv)'w+(uv)w'=(u'v+uv')w+uvw'$$
$$=u'vw+uv'w+uvw'.$$

例 2.2.1 设 $y=x^{\frac{1}{2}}+\cos x+\ln x+\sin 5$ ，求 y' .

解 $y'=(x^{\frac{1}{2}}+\cos x+\ln x+\sin 5)'=(x^{\frac{1}{2}})'+(\cos x)'+(\ln x)'+(\sin 5)'$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}}-\sin x+\frac{1}{x}.$$

例 2.2.2 设 $y=3x^2 2^x$ ，求 y' .

解 $y'=(3x^2 2^x)'=3(x^2)'2^x+3x^2(2^x)'=6x2^x+3x^2 2^x\ln 2$.

例 2.2.3 求 $y=\tan x$ 的导数.

解 $y'=(\tan x)'=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'=\dfrac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x.$$

即 $$(\tan x)'=\sec^2 x.$$

同理可得 $$(\cot x)'=-\csc^2 x.$$

例 2.2.4 求 $y=\sec x$ 的导数.

解 $y'=(\sec x)'=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'=\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\cos x}\cdot\tan x=\sec x\cdot\tan x$.

即 $$(\sec x)'=\sec x\cdot\tan x.$$

同理可得 $$(\csc x)'=-\csc x\cdot\cot x.$$

2.2.2 复合函数的导数

定理 2.2.2 如果函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，同时函数 $y=f(u)$ 在对应的点 u 处可导，则由这两个函数构成的复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x 处一定可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \quad 或 \quad y'_x=y'_u\cdot u'_x .$$

证明 给 x 一个增量 Δx（$\neq 0$），相应地函数 $u=\varphi(x)$ 与 $y=f(u)$ 的改变量分别为 Δu 和 Δy．根据函数的极限与无穷小量之间的关系定理，由 $y=f(u)$ 可导，可得

$$\frac{\Delta y}{\Delta u}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}+\alpha ,$$

其中 α 是当 $\Delta u\to 0$ 时的无穷小．令上式两边同乘 Δu 得

$$\Delta y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\Delta u+\alpha\cdot\Delta u ,$$

于是

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x} ,$$

因为函数 $u=\varphi(x)$ 在 x 处可导，所以有 $u=\varphi(x)$ 在 x 处连续，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，因此 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$，从而有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+\alpha\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right]=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} .$$

上式表明，求复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 对 x 的导数时，可分别求出 $y=f(u)$ 对 u 的导数和 $u=\varphi(x)$ 对 x 的导数，然后相乘即可．

以上法则也可记为 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$ 或 $\{f[\varphi(x)]\}'=f'(u)\cdot\varphi'(x)$．

对于多次复合的函数，其求导公式类似，这种复合函数的求导法则也称为**链式法则**．

例 2.2.5 设 $y=\ln(1+x^3)$，求 y'．

解 令 $y=\ln u$，$u=1+x^3$，因此

$$y'=(\ln u)'_u\cdot(1+x^3)'_x=\frac{1}{u}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{1+x^3} .$$

例 2.2.6 设 $y=\sin 2x$，求 y'．

解 令 $y=\sin u$，$u=2x$，因此

$$y'=(\sin u)'_u\cdot(2x)'_x=\cos u\cdot 2=2\cos 2x ,$$

也可不加中间变量，直接按链式法则求导．

例 2.2.7 $y=\sin\sqrt{x^5+4}$，求 y'．

解 $y'=\cos\sqrt{x^5+4}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x^5+4}}\cdot 5x^4=\dfrac{5x^4\cos\sqrt{x^5+4}}{2\sqrt{x^5+4}}$．

例 2.2.8 $y=\ln\sin e^x$，求 y'.

解 $y'=\dfrac{1}{\sin e^x}\cdot(\cos e^x)\cdot e^x=e^x\cot e^x$.

例 2.2.9 $y=(3x^2+2)^9$，求 y'.

解 $y'=9(3x^2+2)^8(3x^2)'=54x(3x^2+2)^8$.

2.2.3 反函数的求导法则

定理 2.2.3 若单调连续函数 $x=\varphi(y)$ 在区间 I_y 内可导，且 $\varphi'(y)\neq 0$，则其反函数 $y=f(x)$ 在对应的区间 $I_x=\{x\mid x=\varphi(y),\ y\in I_y\}$ 内也可导，且有

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}}.$$

证明 因为 $y=f(x)$ 是 $x=\varphi(y)$ 的反函数，故可将函数 $x=\varphi(y)$ 中的 y 看作中间变量，从而组成复合函数 $x=\varphi(y)=\varphi[f(x)]$. 若上式两边对 x 求导，应用复合函数的链式法则，可得

$$1=\varphi'_y\cdot f'_x \text{ 或 } 1=\frac{dx}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

因此可得

$$f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)} \text{ 或 } \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\dfrac{dx}{dy}} \qquad \left(\frac{dx}{dy}=\varphi'(y)\neq 0\right).$$

例 2.2.10 求函数 $y=\arcsin x$ 的导数.

解 因 $y=\arcsin x$ 是 $x=\sin y$ 的反函数，而 $x=\sin y$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调且可导，且 $(\sin y)'_y=\cos y\neq 0$，因此在对应的区间 $(-1,1)$ 内，有

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{(\sin y)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

即

$$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

同理可得

$$(\arccos x)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

例 2.2.11 求函数 $y=\arctan x$ 的导数.

解 因 $y=\arctan x$ 是 $x=\tan y$ 的反函数，而 $x=\tan y$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内单调

且可导，又 $(\tan y)_y' = \sec^2 y \neq 0$，因此在对应的区间 $(-\infty,+\infty)$ 上，有

$$(\arctan x)_x' = \frac{1}{(\tan y)_y'} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

即
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}\ .$$

同理可知
$$(\operatorname{arc}\cot x)' = -\frac{1}{1+x^2}\ .$$

2.2.4 初等函数的导数

前面我们已经给出了几个基本初等函数的导数，而且建立了函数的四则运算求导法则、复合函数的求导法则以及反函数的求导法则，这就解决了初等函数的求导问题．现将基本导数公式汇成表 2-1．

表 2-1 基本导数公式表

1．$(C)'=0$ （C 为常数）;	2．$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$ （μ 为常数）;
3．$(\log_a x)'=\dfrac{1}{x\ln a}$;	4．$(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$;
5．$(a^x)'=a^x\ln a$;	6．$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x$;
7．$(\sin x)'=\cos x$;	8．$(\cos x)'=-\sin x$;
9．$(\tan x)'=\sec^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$;	10．$(\cot x)'=-\csc^2 x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
11．$(\sec x)'=\sec x\tan x$;	12．$(\csc x)'=-\csc x\cot x$;
13．$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;	14．$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
15．$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;	16．$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$;
17．$(\sinh x)'=\cosh x$;	18．$(\cosh x)'=\sinh x$ ．

以上基本导数公式十分重要，初等函数的求导主要利用上述表格中的常用公式及函数的四则运算求导法则与复合函数的求导法则来运算，因此要熟练掌握．

例 2.2.12 设 $y=(x^3+\sin x)^5$，求 y'．

解 $y'=[(x^3+\sin x)^5]'=5(x^3+\sin x)^4(x^3+\sin x)'$

$\quad =5(x^2+\sin x)^4(3x^2+\cos x)$ ．

例 2.2.13 设 $y=2^{-x}\arcsin x^3$，求 y'．

解　$y'=\left(2^{-x}\right)'\arcsin x^3+\left(\arcsin x^3\right)'2^{-x}=(-2^{-x}\ln 2)\arcsin x^3+\dfrac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}2^{-x}$

$$=2^{-x}\left(\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}-\ln 2\cdot\arcsin x^3\right).$$

例 2.2.14　求函数 $y=\ln(x+\sqrt{x^2+a})$（$a>0$）的导数.

解　$y'=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\cdot\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$.

习题 2.2

1．求下列函数的导数：

（1）$y=xa^x+7\mathrm{e}^x$；　　（2）$y=3x\tan x+\ln x-4$；

（3）$y=x^3+3x\sin x$；　　（4）$y=x^2\ln x$；

（5）$y=3\mathrm{e}^x\sin x$；　　（6）$y=\dfrac{\ln x}{x}$；

（7）$y=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}+\sin 3$；　　（8）$y=\dfrac{1+\sin x}{1-\cos x}$.

2．设 $f(x)$ 可导，求下列函数的导数：

（1）$y=[f(x)]^3$；　　（2）$y=\mathrm{e}^{-f(x)}$；

（3）$y=\dfrac{1}{1-[f(x)]^2}$；　　（4）$y=\arctan[2f(x)]$；

（5）$y=\ln[1+f^3(x)]$；　　（6）$y=f(\sqrt{x}+2)$.

3．求下列函数的导数：

（1）$y=(x^2+x)^4$；　　（2）$y=3\cos(2x+5)$；

（3）$y=\cos^2 x$；　　（4）$y=\ln(\sin x)$；

（5）$y=(x+3\sqrt{x})^2$；　　（6）$y=x\mathrm{e}^{2x}$；

（7）$y=\ln\ln\ln x$；　　（8）$y=\mathrm{e}^{\arctan\sqrt[3]{x}}$.

2.3　高阶导数

我们知道，变速直线运动的速度 $v(t)$ 是路程函数 $s(t)$ 对时间 t 的导数，即

$$v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \text{ 或 } v=s',$$

而加速度 a 又是速度 v 对时间 t 的导数：

$$a=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right) \text{或} a=(s')' .$$

这种导数的导数 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$ 或 $(s')'$ 称为 s 对 t 的二阶导数，记作

$$\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} \text{或} s''(t) .$$

所以，直线运动的加速度就是路程函数 s 对时间 t 的二阶导数.

一般地，设函数 $y'=f'(x)$ 在点 x 的某个邻域内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为函数 $y=f(x)$ 在点 x 的**二阶导数**，记作 y''，$f''(x)$，$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2f(x)}{\mathrm{d}x^2}$，即

$$y''=(y')'，f''(x)=[f'(x)]' \text{或} \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

相应地，把 $y=f(x)$ 的导数 $y'=f'(x)$ 也称为函数 $y=f(x)$ 的一阶导数.

类似地，二阶导数的导数，叫做**三阶导数**，三阶导数的导数叫做**四阶导数**，$\cdots$，一般地，$(n-1)$ 阶导数的导数称为 n **阶导数**，分别记作

$$y'''，y^{(4)}，\cdots，y^{(n)} \quad \text{或} \quad \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}，\frac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4}，\cdots，\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n} .$$

函数 $f(x)$ 具有 n 阶导数，也就是说函数 $f(x)$ 为 n 阶可导. 如果函数 $f(x)$ 在点 x 处具有 n 阶导数，那么 $f(x)$ 在点 x 的某一邻域内一定也具有一切低于 n 阶的导数. 二阶及二阶以上的导数统称为**高阶导数**.

根据高阶导数的定义，求函数的高阶导数就是将函数逐次求导，因此，前面介绍的导数运算法则与导数基本公式仍然适用于高阶导数的计算.

例 2.3.1 设 $y=ax+b$，求 y''.

解 $y'=a$，$y''=0$.

例 2.3.2 设 $y=\mathrm{e}^{-x}\cos x$，求 y''.

解 $y'=-\mathrm{e}^{-x}\cos x+\mathrm{e}^{-x}(-\sin x)=-\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)$，

$$y''=\mathrm{e}^{-x}(\cos x+\sin x)-\mathrm{e}^{-x}(-\sin x+\cos x)=2\mathrm{e}^{-x}\sin x .$$

例 2.3.3 已知 $f''(x)$ 存在，$y=f(x^2)$，求 y''.

解 $y'=2xf'(x^2)$，则

$$\begin{aligned} y''&=(y')'=\left[2xf'(x^2)\right]'=2f'(x^2)+2xf''(x^2)\cdot 2x \\ &=2f'(x^2)+4x^2f''(x^2) . \end{aligned}$$

例 2.3.4 已知函数 $y=\sqrt{2x-x^2}$，求 y''.

解 将 $y=\sqrt{2x-x^2}$ 求导，得 $y'=\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$.

$$y''=\frac{-\sqrt{2x-x^2}-(1-x)\dfrac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}}}{2x-x^2}=\frac{-2x+x^2-(1-x)^2}{(2x-x^2)\sqrt{2x-x^2}}$$

$$=-\frac{1}{(2x-x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\frac{1}{y^3}.$$

下面介绍几个常用的初等函数的 n 阶导数.

例 2.3.5 设 $y=\mathrm{e}^x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y'=\mathrm{e}^x$，$y''=\mathrm{e}^x$，$y'''=\mathrm{e}^x, y^{(4)}=\mathrm{e}^x$.

一般地，可得 $y^{(n)}=\mathrm{e}^x$.

即 $$(\mathrm{e}^x)^{(n)}=\mathrm{e}^x.$$

例 2.3.6 求 $y=\sin x$ 与 $y=\cos x$ 的 n 阶导数.

解 $y=\sin x$， $y'=(\sin x)'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$，

$$y''=\left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=\left[\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right)\right]'=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

……

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

即 $$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

同理可得 $$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

例 2.3.7 求对数函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数.

解 $y=\ln(1+x)$，$y'=\dfrac{1}{1+x}$，$y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$，

$$y'''=\frac{1\times 2}{(1+x)^3},\ y^{(4)}=-\frac{1\times 2\times 3}{(1+x)^4},\cdots\cdots.$$

一般地，可得 $$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n},$$

即
$$[\ln(1+x)]^{(n)}=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

通常规定 $0!=1$，所以这个公式当 $n=1$ 时也成立.

例 2.3.8 求幂函数的 n 阶导数（n 是正整数）.

解 设 $y=x^\mu$ （μ 是任意常数），那么

$$y'=\mu x^{\mu-1},\ y''=\mu(\mu-1)x^{\mu-2},\ \cdots,\ y^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n},$$

即
$$(x^\mu)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots(\mu-n+1)x^{\mu-n}.$$

特别的，当 $\mu=n$ 时，得到 $(x^n)^{(n)}=\mu(\mu-1)(\mu-2)\cdots3\cdot2\cdot1=n!$，而

$$(x^n)^{(n+1)}=0.$$

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 x 处具有 n 阶导数，那么显然 $u(x)+v(x)$ 及 $u(x)-v(x)$ 也在点 x 处具有 n 阶导数，且

$$(u\pm v)^{(n)}=u^{(n)}\pm v^{(n)}.$$

但乘积 $u(x)\cdot v(x)$ 的 n 阶导数并不如此简单．由

$$(uv)'=u'v+uv',$$

首先得出

$$(uv)''=u''v+2u'v'+uv'',$$
$$(uv)'''=u'''v+3u''v'+3u'v''+uv'''.$$

用数学归纳法可以证明

$$(uv)^{(n)}=u^{(n)}v+nu^{(n-1)}v'+\frac{n(n-1)}{2!}u^{(n-2)}v''+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}u^{(n-k)}v^{(k)}+\cdots+uv^{(n)}.$$

上式称为**莱布尼茨**（Leibniz）**公式**．这个公式可以这样记忆：把 $(u+v)^n$ 按二项式定理展开写成

$$(u+v)^n=u^nv^0+nu^{n-1}v+\frac{n(n-1)}{2!}u^{n-2}v^2+\cdots+u^0v^n,$$

即
$$(u+v)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{n-k}v^k.$$

然后把 k 次幂换成 k 阶导数（零阶导数理解为函数本身），再把左端的 $u+v$ 换成 uv，这样就得到莱布尼茨公式

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}.$$

例 2.3.9 $y=x^2\mathrm{e}^{2x}$，求 $y^{(20)}$.

解 设 $u=\mathrm{e}^{2x},v=x^2$，则

$$u^{(k)}=2^k\mathrm{e}^{2x}\quad（k=1,2,\cdots,20），$$

$$v'=2x,\ v''=2,\ v^{(k)}=0\ (k=3,4,\cdots,20),$$

代入莱布尼茨公式，得

$$\begin{aligned}y^{(20)}&=(x^2\mathrm{e}^{2x})^{(20)}=2^{20}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+20\cdot 2^{19}\mathrm{e}^{2x}\cdot x^2+\frac{20\cdot 19}{2!}2^{18}\mathrm{e}^{2x}\cdot 2\\&=2^{20}\mathrm{e}^{2x}(x^2+20x+95).\end{aligned}$$

习题 2.3

1．求下列函数的二阶导数：

（1）$y=x\mathrm{e}^x$；　（2）$y=x^2\ln x$；

（3）$y=\mathrm{e}^{2x-1}$；　（4）$y=3\mathrm{e}^x\cos x$；

（5）$y=\ln\sin x$；　（6）$y=\arctan x^2$；

（7）$y=x\cos x$；　（8）$y=(1+x^2)\arctan x$．

2．设 $f''(x)$ 可导，求下列函数的二阶导数 $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$：

（1）$y=f(\ln x)$；　（2）$y=\ln[f(x)]$．

3．求下列函数所指定的阶的导数：

（1）$y=\mathrm{e}^x x^2$，求 $y^{(4)}$；　（2）$y=x^2\sin x$，求 $y^{(20)}$．

2.4　隐函数及由参数方程所确定的函数的导数

2.4.1　隐函数的导数

前面我们所遇到的函数，例如 $y=\cot x$，$y=\ln 3x+\sqrt{3-x^2}$ 等，这种函数表达方式的特点是：等号左端是因变量的符号 y，而右端是含有自变量 x 的某个式子，当自变量取定义域内任一值时，由这式子能有确定对应的函数值．用这种方式表达的函数叫做**显函数**．有些函数的表达方式却不是这样，例如，方程 $x+y^3-1=0$ 表示一个函数，因为当变量 x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内取值时，变量 y 有确定的值与之对应．例如，当 $x=0$ 时，$y=1$；当 $x=-1$ 时，$y=\sqrt[3]{2}$ 等．以这种形式表示的函数称为隐函数．

一般地，如果变量 x 和 y 满足一个方程 $F(x,y)=0$，在一定条件下，当 x 取某区间内的任一值时，相应地总有满足这方程的唯一的 y 值存在，那么就说方程 $F(x,y)=0$ 在该区间内唯一确定了一个**隐函数**．

把一个隐函数化成显函数，叫做隐函数的显化．例如从方程 $x+y^3-1=0$ 解出

$y=\sqrt[3]{1-x}$，就把隐函数化成显函数．隐函数的显化有时是有困难的，甚至是不可能的．但在实际问题中，有时需要计算隐函数的导数，因此，我们希望找到一种方法，不管隐函数能否显化，都能直接由方程解出它所确定的隐函数的导数来．下面通过具体例子来说明这种方法．

例 2.4.1　求由方程 $e^y+xy+2e=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$．

解　我们把方程两边分别对 x 求导数，注意 y 是 x 的函数．方程左边对 x 求导得

$$\frac{d(e^y+xy+2e)}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx},$$

方程右边对 x 求导得 $(0)'=0$．

由于等式两边对 x 的导数相等，所以 $e^y\dfrac{dy}{dx}+y+x\dfrac{dy}{dx}=0$，

从而
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{y}{x+e^y}\quad（x+e^y\neq 0）.$$
在这个结果中，分式中的 y 是由方程 $e^y+xy+2e=0$ 所确定的隐函数．

例 2.4.2　求方程 $2x^2+y^2=1$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数 $\dfrac{dy}{dx}$．

解　因为 y 是 x 的函数，所以 y^2 是 x 的复合函数，方程两端同对 x 求导，得

$$4x+2y\cdot y'=0.$$

解 y'，便得到所求隐函数的导数为

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{2x}{y}\qquad（y\neq 0）.$$

例 2.4.3　设 $y=\arctan(x+3y)$，求 $\dfrac{dy}{dx}$．

解　方程两边对 x 求导，得

$$y'=\frac{1}{1+(x+3y)^2}(1+3y'),$$

解 y'，得
$$y'=\frac{1}{(x+3y)^2-2}.$$

例 2.4.4　求由方程 $2x-y+\sin y=0$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数．

解　求隐函数 $y=y(x)$ 的一阶导数．方程两边同对 x 求导，注意 y 是 x 的函数，有

$$2-y'+\cos y\cdot y'=0.$$

解得
$$y'=\frac{2}{1-\cos y}.$$

2.4.2　对数求导法

在计算幂指函数的导数以及某些乘幂、连乘积、带根号函数的导数时，可以采用先取对数再求导的方法，简称**对数求导法**．它的运算过程如下：

在 $y=f(x)$（ $f(x)>0$ ）的两边取对数，得 $\ln y=\ln f(x)$；

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得 $\dfrac{y'}{y}=(\ln f(x))'$．

例 2.4.5　设 $y=\sqrt{\dfrac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+2)(x^2+3)}}$，求 y'．

解　将函数两边取自然对数，得

$$\ln y=\frac{1}{2}[\ln(x^2+1)+\ln(3x-4)-\ln(x+2)-\ln(x^2+3)],$$

两边对 x 求导，得

$$\frac{1}{y}y'=\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+3}\right],$$

所以
$$y'=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(x^2+1)(3x-4)}{(x+2)(x^2+3)}}\cdot\left[\frac{2x}{x^2+1}+\frac{3}{3x-4}-\frac{1}{x+2}-\frac{2x}{x^2+3}\right].$$

例 2.4.6　求 $y=\dfrac{(x^2+2)^2}{(x^4+1)(x^2-3)}$ 的导数．

解　先在两边取对数，得 $\ln y=2\ln(x^2+2)-\ln(x^4+1)-\ln(x^2-3)$．

上式两边对 x 求导，注意到 y 是 x 的函数，得

$$\frac{y'}{y}=\frac{4x}{x^2+2}-\frac{4x^3}{x^4+1}-\frac{2x}{x^2-3},$$

于是
$$y'=y\left(\frac{4x}{x^2+2}-\frac{4x^3}{x^4+1}-\frac{2x}{x^2-3}\right),$$

即
$$y'=\frac{(x^2+2)^2}{(x^4+1)(x^2-3)}\left(\frac{4x}{x^2+2}-\frac{4x^3}{x^4+1}-\frac{2x}{x^2-3}\right).$$

设 $y=u(x)^{v(x)}$，$u(x)>0$，其中 $u(x)$，$v(x)$ 均可导，求 y'．

两边取对数得，$\ln y=v(x)\ln u(x)$，两边对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)},$$

于是
$$y'=u(x)^{v(x)}\left(v'(x)\ln u(x)+\frac{v(x)u'(x)}{u(x)}\right).$$

特别地，当 $u(x)=v(x)=x$ 时，$(x^x)'=x^x(1+\ln x)$．

例 2.4.7 $y=x^{\sin x}$ （$x>0$），求 y'.

解 在等式两边同取对数，得

$$\ln y=\sin x\ln x,$$

等式两边再同对 x 求导，得

$$\frac{y'}{y}=\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x},$$

即

$$\begin{aligned}y'&=y\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right)\\&=x^{\sin x}\left(\cos x\ln x+\sin x\cdot\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

*2.4.3 由参数方程所确定的函数的导数

若方程 $x=\varphi(t)$ 和 $y=\psi(t)$ 确定了 y 与 x 间的函数关系，则称此函数关系所表达的函数为由参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t),\\y=\psi(t),\end{cases}t\in(\alpha,\beta),$$

所确定的函数 $y=y(x)$．下面来讨论由参数方程所确定的函数的导数.

设 $t=\varphi^{-1}(x)$ 为 $x=\varphi(t)$ 的反函数，在 $t\in(\alpha,\beta)$ 中，函数 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 均可导，这时由复合函数的求导法则和反函数的求导法则，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\quad(\varphi'(t)\neq0).$$

于是由参数方程所确定的函数 $y=y(x)$ 的导数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

例 2.4.8 设 $\begin{cases}x=a\cos^3t,\\y=a\sin^3t,\end{cases}$ 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{3a\sin^2t\cos t}{3a\cos^2t(-\sin t)}=-\tan t$ （$t\neq\dfrac{n\pi}{2}$，n 为整数）.

习题 2.4

1．求下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$：

（1）$x^2+y^2=xy$；（2）$x^2\sin y=\cos(x+y)$；

（3） $x^2 y = \mathrm{e}^{3x+2y}$；　　　　　　（4） $y = 1+\sin x\cdot \mathrm{e}^y$.

2．求曲线 $\mathrm{e}^y - xy - 2 = 0$ 在点 $(0,\ln 2)$ 处的切线方程.

3．用对数求导法求下列函数的导数：

（1） $y=\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$；　　　　　　（2） $y=\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^x$；

（3） $y=\dfrac{\sqrt{x+2}(3-x)^4}{(x+1)^5}$；　　　　　　（4） $y=\dfrac{\sqrt{x^2+2x}}{\sqrt[3]{x^2-2}}$.

4*．已知 $\begin{cases} x=\mathrm{e}^t\sin t, \\ y=\mathrm{e}^t\cos t. \end{cases}$ 求当 $t=\dfrac{\pi}{3}$ 时 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 的值.

2.5　函数的微分

在实际问题中，经常遇到这样一类问题：当自变量有一个微小的改变量 Δx 时，要计算相应的函数值的改变量 Δy ，对于比较复杂的函数，计算其改变量 Δy 往往是比较困难的，因此有必要讨论计算函数改变量的近似公式.

2.5.1　微分的概念

先考虑一个具体问题.

例 2.5.1　设有一个边长为 x_0 的正方形金属片，均匀受热后它的各边长伸长了 Δx ，则其面积增加了多少？

解　正方形金属片的面积 A 与边长 x 的函数关系为 $A=x^2$. 由图 2.3 可以看出，受热后，当边长由 x_0 伸长到 $x_0+\Delta x$ 时，面积 A 相应的增量为

$$\Delta A=(x_0+\Delta x)^2-x_0^2=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2 .$$

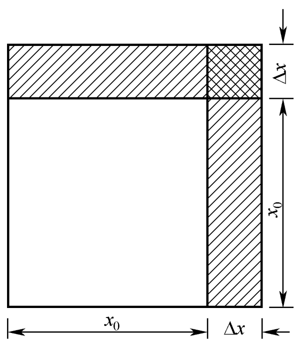


图 2.3

从上式可以看出， ΔA 可分成两部分：第一部分是 Δx 的线性函数 $2x_0\Delta x$ ，当

$\Delta x \to 0$ 时与 Δx 为同阶无穷小；而第二部分为 $(\Delta x)^2$，当 $\Delta x \to 0$ 时是 Δx 的高阶无穷小．这表明，当 $|\Delta x|$ 很小时，第二部分的绝对值要比第一部分的绝对值小得多，可以忽略不计，而只用一个简单的函数，即 Δx 的线性函数作为 ΔA 的近似值：

$$\Delta A \approx 2x_0\Delta x \ . \tag{2.5.1}$$

显然，$2x_0\Delta x$ 是容易计算的，它是边长 x_0 有增量 Δx 时，面积 ΔA 的增量的主要部分（亦称**线性主部**），是 Δx 的线性函数．

考虑到 $2x_0 = A'\big|_{x=x_0} = A'(x_0)$，（2.5.1）式可写成

$$\Delta A \approx A'(x_0)\Delta x \ .$$

由此我们引入函数微分的概念．

定义 2.5.1 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义，如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可以表示为

$$\Delta y = A\Delta x + o\,(\Delta x)\ ,$$

其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o\,(\Delta x)$ 是当 $\Delta x \to 0$ 时比 Δx 高阶的无穷小，则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微**，$A\Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的**微分**，记作

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0}\ ，即\ \mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = A\Delta x \ . \tag{2.5.2}$$

于是，（2.5.1）式可写成

$$\Delta A \approx \mathrm{d}A\big|_{x=x_0} \ .$$

可以证明，函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可微与可导是等价的，且 $A = f'(x_0)$，因而 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分可写成

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\Delta x \ .$$

通常把自变量的增量 Δx 记作 $\mathrm{d}x$，称为**自变量的微分**，于是函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的微分又可写成

$$\mathrm{d}y\big|_{x=x_0} = f'(x_0)\mathrm{d}x \ . \tag{2.5.3}$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内每一点都可微，则称该函数在 (a,b) 内**可微**，或称函数 $f(x)$ 是在 (a,b) 内的**可微函数**．此时，函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内任意一点 x 处的微分，称为**函数的微分**，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x \ , \tag{2.5.4}$$

上式两端同除以自变量的微分 $\mathrm{d}x$，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)\ .$$

这就是说，函数 $f(x)$ 的导数也等于函数的微分与自变量的微分的商，因此导数也称为**微商**．

例 2.5.2 设 $y = \sqrt{5+x^2}$，求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与 $\mathrm{d}y$．

解 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\left(\sqrt{5+x^2}\right)'=\dfrac{1}{2\sqrt{5+x^2}}(5+x^2)'=\dfrac{x}{\sqrt{5+x^2}}$,

故
$$\mathrm{d}y=\frac{x}{\sqrt{5+x^2}}\mathrm{d}x .$$

例 2.5.3 求当 $x=1$， $\Delta x=0.01$ 时函数 $y=x^2+1$ 的微分.

解 函数的微分

$$\mathrm{d}y=(x^2+1)'\Delta x=2x\Delta x .$$

于是
$$\mathrm{d}y\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=2x\Delta x\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0.01}}=0.02 .$$

例 2.5.4 半径为 r 的圆的面积为 $S=\pi r^2$，当半径增大 Δr 时，求圆面积的增量与微分.

解 面积的增量 $\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+\pi(\Delta r)^2$.

面积的微分为 $\mathrm{d}S=S_r'\cdot\Delta r=2\pi r\Delta r.$

2.5.2 微分的几何意义

设函数 $y=f(x)$ 的图形如图 2.4 所示．过曲线 $y=f(x)$ 上一点 $M(x,y)$ 处作切线 MT，设 MT 的倾角为 α，则

$$\tan\alpha=f'(x) .$$

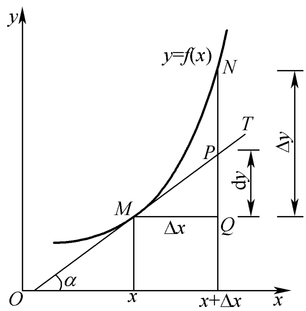


图 2.4

当自变量 x 有增量 Δx 时，切线 MT 的纵坐标相应地有增量

$$QP=\tan\alpha\cdot\Delta x=f'(x)\Delta x=\mathrm{d}y .$$

因此，微分 $\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$ 在几何上表示当 x 有增量 Δx 时，曲线 $y=f(x)$ 在对应点 $M(x,y)$ 处切线的纵坐标的增量.

2.5.3 微分的基本公式与微分法则

1．微分的基本公式

函数 $y=f(x)$ 的微分等于导数 $f'(x)$ 乘以 $\mathrm{d}x$，所以根据导数公式和运算法则，

就能得相应的微分公式和微分运算法则.

（1） $\mathrm{d}(C)=0$ （ C 为常数）；

（2） $\mathrm{d}(x^{\mu})=\mu x^{\mu-1}\mathrm{d}x$ ；

（3） $\mathrm{d}(\log_a x)=\dfrac{1}{x\ln a}\mathrm{d}x$ ；

（4） $\mathrm{d}\ln x=\dfrac{1}{x}\mathrm{d}x$ ；

（5） $\mathrm{d}(a^x)=a^x\ln a\mathrm{d}x$ ；

（6） $\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$ ；

（7） $\mathrm{d}(\sin x)=\cos x\mathrm{d}x$ ；

（8） $\mathrm{d}(\cos x)=-\sin x\mathrm{d}x$ ；

（9） $\mathrm{d}(\tan x)=\sec^2 x\mathrm{d}x=\dfrac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x$ ；

（10） $\mathrm{d}(\cot x)=-\csc^2 x\mathrm{d}x=-\dfrac{1}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$ ；

（11） $\mathrm{d}(\sec x)=\sec x\tan x\mathrm{d}x$ ；

（12） $\mathrm{d}(\csc x)=-\csc x\cot x\mathrm{d}x$ ；

（13） $\mathrm{d}(\arcsin x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ；

（14） $\mathrm{d}(\arccos x)=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$ ；

（15） $\mathrm{d}(\arctan x)=\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ ；

（16） $\mathrm{d}(\mathrm{arc}\cot x)=-\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

2. 函数的和、差、积、商的微分运算法则

设函数 $u=u(x)$ ， $v=v(x)$ 均可微，则

$$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v\text{；}$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v\text{；}$$

$$\mathrm{d}(Cu)=C\,\mathrm{d}u\qquad(C\text{ 为常数})\text{；}$$

$$\mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v}{v^2}\qquad(v\neq 0).$$

3. 复合函数的微分法则

设函数 $y=f(u)$， $u=\varphi(x)$ 都是可导函数，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的微分为

$$\mathrm{d}y=\left\{f\left[\varphi(x)\right]\right\}'_x\mathrm{d}x=f'(u)\varphi'(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

而

$$\mathrm{d}u=\varphi'(x)\mathrm{d}x\text{，}$$

于是

$$\mathrm{d}y=f'(u)\mathrm{d}u\,. \tag{2.5.5}$$

将（2.5.5）式与（2.5.4）式比较，可见不论 u 是自变量还是中间变量，函数 $y=f(u)$ 的微分总保持同一形式，这个性质称为**一阶微分形式不变性**.

利用这个性质，可以比较方便地求一些复合函数的微分、隐函数的微分以及它们的导数.

例 2.5.5 设 $y=\sin(2x+1)$ ，求 $\mathrm{d}y$.

解 把 $2x+1$ 看成中间变量 u ，则

$$\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\sin u)=\cos u\mathrm{d}u=\cos(2x+1)\mathrm{d}(2x+1)=\cos(2x+1)2\mathrm{d}x=2\cos(2x+1)\mathrm{d}x\,.$$

在求复合函数的导数时，可以不写出中间变量．在求复合函数的微分时，类似地也可以不写出中间变量．下面我们用这种方法来求函数的微分．

例 2.5.6 设 $y=\ln(1+\mathrm{e}^{x^2})$，求 $\mathrm{d}y$．

解 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}(\ln(1+\mathrm{e}^{x^2}))=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}(1+\mathrm{e}^{x^2})=\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\cdot\mathrm{e}^{x^2}\mathrm{d}(x^2)$

$$=\frac{\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}2x\mathrm{d}x=\frac{2x\mathrm{e}^{x^2}}{1+\mathrm{e}^{x^2}}\mathrm{d}x.$$

例 2.5.7 设 $y=\mathrm{e}^{1-3x}\cos x$，求 $\mathrm{d}y$．

解 利用函数乘积的微分法则，得

$$\begin{aligned}\mathrm{d}y&=\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x}\cos x)=\cos x\mathrm{d}(\mathrm{e}^{1-3x})+\mathrm{e}^{1-3x}\mathrm{d}(\cos x)\\&=(\cos x)\mathrm{e}^{1-3x}(-3\mathrm{d}x)+\mathrm{e}^{1-3x}(-\sin x\mathrm{d}x)\\&=-\mathrm{e}^{1-3x}(3\cos x+\sin x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

例 2.5.8 求由方程 $x^3+2xy-2y^3=1$ 所确定的隐函数 $y=f(x)$ 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 与微分 $\mathrm{d}y$．

解 **法 1** 对方程两边求导数，得

$$3x^2+2y+2xy'-6y^2y'=0.$$

导数为

$$y'=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x},$$

微分为

$$\mathrm{d}y=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}\mathrm{d}x.$$

法 2 对方程两边直接求微分，得

$$\mathrm{d}(x^3+2xy-2y^3)=0,$$

即

$$3x^2\mathrm{d}x+2x\mathrm{d}y+2y\mathrm{d}x-6y^2\mathrm{d}y=0,$$

所以

$$\mathrm{d}y=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}\mathrm{d}x,$$

因此

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y'=\frac{3x^2+2y}{6y^2-2x}.$$

例 2.5.9 在下列等式左端的括号中填入适当的函数，使等式成立：

（1）$\mathrm{d}(\quad)=x^2\mathrm{d}x$；（2）$\mathrm{d}(\quad)=\cos\omega t\mathrm{d}t$．

解 （1）我们知道，$\mathrm{d}(x^3)=3x^2\mathrm{d}x$．可见 $x^2\mathrm{d}x=\dfrac{1}{3}\mathrm{d}(x^3)=\mathrm{d}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)$．

即
$$d\left(\frac{x^3}{3}\right)=x^2dx.$$
一般地，有 $d\left(\frac{x^2}{3}+C\right)=x^2dx$（$C$ 为任意常数）.

（2）因为
$$d(\sin\omega t)=\omega\cos\omega t dt,$$
可见
$$\cos\omega t dt=\frac{1}{\omega}d(\sin\omega t)=d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right).$$
即
$$d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t\right)=\cos\omega t dt.$$
一般地，有 $d\left(\frac{1}{\omega}\sin\omega t+C\right)=\cos\omega t dt$（$C$ 为任意常数）.

由以上讨论可以看出，微分与导数虽是两个不同的概念，但却紧密相关，事实上求出了导数便立即可得到微分，求出了微分亦可得到导数，即
$$f'(x)=\frac{dy}{dx},\quad dy=f'(x)dx.$$
通常把函数的导数与微分的运算统称为微分运算．在高等数学中，把研究导数和微分的有关内容称为微分学.

*2.5.4　微分在近似计算中的应用

在实际问题中，经常利用微分作近似计算.

由微分的定义可知，当 $|\Delta x|$ 很小时，
$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\approx dy=f'(x_0)\Delta x,$$
或写成
$$f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\Delta x.\tag{2.5.6}$$
记 $x_0+\Delta x=x$，则上式又可写为
$$f(x)\approx f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).\tag{2.5.7}$$
特别地，当 $x_0=0$ 时，有
$$f(x)\approx f(0)+f'(0)\cdot x.\tag{2.5.8}$$
公式（2.5.6）、（2.5.7）、（2.5.8）都可用来求函数 $f(x)$ 的近似值.

应用（2.5.8）式可以推得一些常用的近似公式，当 $|x|$ 很小时，有

（1）$\sin x\approx x$（x 用弧度作单位来表示）；

（2）$\tan x\approx x$（x 用弧度作单位来表示）；

（3）$e^x\approx 1+x$；

（4）$\ln(1+x)\approx x$；

（5）$\sqrt[n]{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{n}x$.

例 2.5.10 有一批半径为 1cm 的球，为了提高球面的光洁度，要镀上一层铜，厚度定为 0.01cm，估计一下，每只球需用铜多少克.（铜的密度为 8.9cm^3）

解 设球体的半径为 R，则球体的体积为 $V=\dfrac{4}{3}\pi R^3$，

镀铜体积为球体的体积 V 在 $R=1\,\text{cm}$，$\Delta R=0.01\,\text{cm}$ 时体积的增量为 ΔV，

$$\Delta V \approx \mathrm{d}V\bigg|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} = 4\pi R^2\Delta R\bigg|_{\substack{R=1\\ \Delta R=0.01}} \approx 0.13 \ (\text{cm}^3),$$

因此每只球需用铜约为 $8.9\times 0.13=1.16$（g）.

例 2.5.11 计算 $\sin 46^\circ$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sin x$，取 $x=46^\circ$，$x_0=45^\circ=\dfrac{\pi}{4}$，则 $x-x_0=1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$，

于是由（2.5.7）式得

$$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x-x_0),$$

所以 $$\sin 46^\circ \approx \sin\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180}\approx 0.719.$$

例 2.5.12 计算 $\sqrt{1.05}$ 的近似值.

解 设 $f(x)=\sqrt{x}$，取 $x_0=1$，$\Delta x=0.05$，

于是由（2.5.6）式得

$$\sqrt{1.05}\approx\sqrt{1}+\frac{1}{2\sqrt{1}}0.05=1+\frac{1}{2}\times 0.05=1.025.$$

如果直接开方，可得 $\sqrt{1.05}=1.02470$.

将两个结果比较一下，可以看出，用 1.025 作为 $\sqrt{1.05}$ 的近似值，其误差不超过 0.001，这样的近似值在一般应用上已够精确了．如果开方次数较高，就更能体现出用微分进行近似计算的优越性.

习题 2.5

1．已知 $y=x^2-x$，计算当 x 等于 1，Δx 等于 0.1 时的 Δy，$\mathrm{d}y$.

2．求下列函数的微分：

（1）$y=\dfrac{1}{x}+2\sqrt{x}$；　　（2）$y=x\sin 2x$；

（3）$y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$；　　（4）$y=\ln^2(1-x)$；

（5）$y=x^2\mathrm{e}^{2x}$；　　（6）$y=f(\mathrm{e}^x)$.

3．在括号内填入适当的函数，使等式成立：

（1）$\dfrac{1}{a^2+x}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；（2）$x\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；

（3）$\dfrac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$；（4）$\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\quad)$．

4．已知下列方程所确定的函数 $y=f(x)$，求 $\mathrm{d}y$：

（1）$xy=1+x\mathrm{e}^y$；（2）$\mathrm{e}^{x+y}+\cos(xy)=0$．

5．设 $y=y(x)$ 是由方程 $\ln(x^2+y^2)=x+y-1$ 所确定的隐函数，求 $\mathrm{d}y$ 及 $\mathrm{d}y\big|_{(0,1)}$．

2.6 边际与弹性

边际分析与弹性分析是微观经济学、管理经济学等经济学的基本方法，也是现代企业进行经营决策的基本方法．本节介绍这两个分析方法的基本知识和简单应用．

2.6.1 边际分析

1．边际的概念

在经济学中，习惯上用平均和边际这两个概念来描述一个经济变量 y 对另一个变量 x 的变化．平均概念表示 x 在某一范围内对 y 取值的变化．边际概念表示当 x 的改变量 Δx 趋于 0 时，y 的相应的改变量 Δy 与 Δx 的比值的变化，即当 x 在某一给定值附近有微小变化时的瞬时变化率．

如果函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处可导，则在 $(x_0,x_0+\Delta x)$ 内的平均变化率为 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$；在 $x=x_0$ 处的瞬时变化率为 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)$（经济学中称之为 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**边际函数值**）．

由微分的应用可知，当自变量 x 的改变量很小时

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}\approx \mathrm{d}y=f'(x)\Delta x\Big|_{\substack{x=x_0\\ \Delta x=1}}=f'(x_0).$$

这说明 $f(x)$ 点 $x=x_0$ 处，当 x 产生一个单位的改变时，y 近似改变 $f'(x_0)$ 个单位．在应用问题中解释边际函数值的具体意义时略去“近似”，有如下定义．

定义 2.6.1 设函数 $y=f(x)$ 在 x 处可导，则称导数 $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的**边际函数**．$f'(x)$ 在 x_0 处的值 $f'(x_0)$ 称为**边际函数值**．其含义是：当 $x=x_0$ 时，x 改变一个单位，y 改变了 $f'(x_0)$ 个单位．

例 2.6.1 设函数 $y=2x^2$，试求 y 在 $x=5$ 时的边际函数值．

解　因为 $y'=4x$，所以 $y'\big|_{x=5}=20$．该值表明：当 $x=5$ 时，x 改变一个单位（增加或减少一个单位），y 改变 20 个单位（增加或减少 20 个单位）．

2. 经济学中常见的边际函数

边际成本

总成本函数 $C(Q)$ 的导数 $C'(Q)=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta C}{\Delta Q}=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{C(Q+\Delta Q)-C(Q)}{\Delta Q}$ 称为**边际成本**.

经济意义：假定已经生产了 Q 单位产品，再增产（或减产）一个单位，需增加（或减少）的成本.

一般来说，总成本 $C(Q)$ 等于固定成本 C_0 与可变成本 $C_1(Q)$ 之和，即 $C(Q)=C_0+C_1(Q)$，则边际成本为 $C'(Q)=\left[C_0+C_1(Q)\right]'=C_1'(Q)$，显然边际成本与固定成本无关.

例 2.6.2　设某产品生产 Q 单位的总成本为 $C(Q)=1100+\dfrac{Q^2}{1200}$，求：

（1）生产 900 个单位时的总成本和平均成本；

（2）生产 900 个单位到 1000 个单位时的总成本的平均变化率；

（3）生产 900 个单位边际成本，并解释其经济意义.

解　（1）生产 900 个单位时的总成本为 $C(Q)\big|_{Q=900}=1100+\dfrac{900^2}{1200}=1775$．

平均成本　$\bar{C}(Q)\big|_{Q=900}=\dfrac{1775}{900}\approx 1.97$．

（2）生产 900 个单位到 1000 个单位时的总成本的平均变化率为

$$\frac{\Delta C(Q)}{\Delta Q}=\frac{C(1000)}{1000-900}=\frac{1933-1775}{100}\approx 1.58\,.$$

（3）边际成本函数 $C_1'(Q)=\dfrac{2Q}{1200}=\dfrac{Q}{600}$，当 $Q=900$ 时的边际成本为

$$C'(Q)\big|_{Q=900}=1.5\,.$$

它表示当产量为 900 个单位时，再增产（或减产）一个单位，需增加（或减少）成本 1.5 个单位.

边际收益

总收益函数 $R(Q)$ 的导数

$$R'(Q)=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta R}{\Delta Q}=\lim_{\Delta Q\to 0}\frac{R(Q+\Delta Q)-R(Q)}{\Delta Q}$$

称为**边际收益**.

经济意义：假定已经销售了 Q 单位产品，再销售一个单位产品所增加的收益.

设 P 为价格，且 P 也是销售量 Q 的函数，即 $P=P(Q)$，因此 $R(Q)=Q\cdot P(Q)$，则边际收益为　$R'(Q)=P(Q)+QP'(Q)$．

例 2.6.3 设某产品的需求函数为 $P=20-\dfrac{Q}{5}$，其中 P 为价格，Q 为销售量，求销售量为 15 个单位时的总收益，平均收益与边际收益．并求销售量从 15 个单位增加到 20 个单位时收益的平均变化率．

解 总收益 $R(Q)=Q\cdot P(Q)=20Q-\dfrac{Q^2}{5}$．

销售 15 个单位时，总收益

$$R\Big|_{Q=15}=\left(20Q-\frac{Q^2}{5}\right)\Big|_{Q=15}=255\,,$$

平均收益

$$\bar{R}\Big|_{Q=15}=\frac{R(Q)}{Q}\Big|_{Q=15}=\frac{255}{15}=17\,,$$

边际收益

$$R'(Q)\Big|_{Q=15}=\left(20-\frac{2Q}{5}\right)\Big|_{Q=15}=14\,.$$

当销售量从 15 个单位增加到 20 个单位时的平均变化率为

$$\frac{\Delta R}{\Delta Q}=\frac{R(20)-R(15)}{20-15}=\frac{320-255}{5}=13\,.$$

边际利润

总利润 $L(Q)$ 的导数 $L'(Q)=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{\Delta L}{\Delta Q}=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\dfrac{L(Q+\Delta Q)-L(Q)}{\Delta Q}$ 称为**边际利润**．

经济意义：若已经产生了 Q 单位产品，再生产一个单位产品所改变的总利润．

总利润函数 $L(Q)=R(Q)-C(Q)$，则边际利润为 $L'(Q)=R'(Q)-C'(Q)$，且当

$$R(Q)\begin{cases}>C'(Q),\\ =C'(Q),\\ <C'(Q)\end{cases}\text{时，}\quad L'(Q)\begin{cases}>0,\\ =0,\\ <0.\end{cases}.$$

当 $R'(Q)>C'(Q)$ 时，$L'(Q)>0$，即产量已达到 Q，再多生产一个单位产品，所增加的收益大于所增加的成本，因而总利润有所增加；而当 $R'(Q)<C'(Q)$，$L'(Q)<0$，即再增加产量，所增加的收益要小于所增加的生产成本，从而总利润将减少．

例 2.6.4 某工厂对其产品的情况经过了大量统计分析后，得出总利润 $L(Q)$（元）与每月产量 Q（吨）的关系为 $L=L(Q)=250Q-5Q^2$，试确定每月生产 20 吨，25 吨，35 吨的边际利润，并作出经济解释．

解 边际利润函数为 $L'(Q)=250-10Q$，则

$$L'(Q)\Big|_{Q=20}=L'(20)=50\,;$$

$$L'(Q)\Big|_{Q=25}=L'(25)=0\text{；}$$
$$L'(Q)\Big|_{Q=35}=L'(35)=-100\text{.}$$

上述结果表明当生产量为每月 20 吨时，再增加一吨，利润将增加 50 元，当产量为每月 25 吨时，再增加一吨，利润不变；当产量为每月 20 吨时，再增加一吨，利润减少 100 元．这也说明，对厂家来说，并非生产的产量越多，利润越高．

边际需求

若 $Q=f(P)$ 是需求函数，则需求量 Q 对价格 P 的导数 $\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=f'(P)$ 称为**边际需求函数**．

经济意义：当产品价格为 P 时，价格上涨一个单位产品所减少的需求量．

$Q=f(P)$ 的反函数 $P=f^{-1}(Q)$ 是价格函数，价格对需求的导数 $\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}=(f^{-1}(Q))'$ 称为**边际价格函数**，由反函数求导法则可知，边际需求函数与边际价格函数互为倒数，即

$$f'(P)=\frac{1}{(f^{-1}(Q))'}\text{.}$$

例 2.6.5　某商品的需求函数为 $Q=Q(P)=75-P^2$，求 $P=4$ 时的边际需求，并说明其经济意义．

解　$Q'(P)=\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-2P$，当 $P=4$ 时的边际需求为 $Q'(P)\Big|_{P=4}=-8$，

它的经济意义是价格为 4 时，价格上涨（或下降）1 个单位，需求量将减少（或增加）8 个单位．

2.6.2　弹性分析

在边际分析中所研究的是函数的绝对改变量与绝对变化率，经济学中常需要研究一个变量对另一个变量的相对变化的情况，为此引入下面的定义．

定义 2.6.2　设函数 $y=f(x)$ 可导，函数的相对变化量

$$\frac{\Delta y}{y}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{f(x)}$$

与自变量的相对改变 $\dfrac{\Delta x}{x}$ 之比 $\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$，称为函数 $f(x)$ 在 x 与 $x+\Delta x$ 两点之间的**弹性**（或**相对变化率**）．而极限 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}$ 称为函数 $f(x)$ 在 x 处的**弹性**（或**相对变化率**），记为 $\dfrac{E}{Ex}f(x)=\dfrac{Ey}{Ex}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y/y}{\Delta x/x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{x}{y}=y'\dfrac{x}{y}$．

注意：函数 $f(x)$ 在 x 处的弹性 $\dfrac{Ey}{Ex}$ 反映随 x 的变化 $f(x)$ 变化幅度的大小，即 $f(x)$ 对 x 变化反应的灵敏度．数值上，$\dfrac{E}{Ex}f(x)$ 表示 $f(x)$ 在 x 处，当 x 发生 1% 的改变时，函数 $f(x)$ 近似改变 $\dfrac{E}{Ex}f(x)\%$，在应用问题中解释弹性的具体意义时，通常省略去“近似”二字．

例如，求函数 $y=2x+3$ 在 $x=3$ 处的弹性．

$$\frac{Ey}{Ex}=y'\frac{x}{y}=\frac{2x}{3+2x}，\quad \frac{Ey}{Ex}\bigg|_{x=3}=\frac{2\times3}{3+2\times3}=\frac{6}{9}\approx0.67 .$$

1．需求的价格弹性

所谓的**需求的价格弹性**是指当价格变化一定的百分比以后引起的需求量的反应的强烈程度（灵敏度）．

用公式表示即

$$E_d=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} .$$

经济意义：当价格为 P 时，价格每上涨 1%，需求量就会下降 $E_d\%$ ．

例 2.6.6 某需求曲线为 $Q=-100P+3000$，求当 $P=20$ 时的弹性．

解 $E_d=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=-100\times\dfrac{20}{1000}=-2$，

即当价格为 20 时，价格每上涨 1%，需求量就会下降 2% ．

注意：由于需求的价格弹性计算出来的结果总是负值，所以为了讨论方便，也可以记 $\eta=-\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}$ 为需求的价格弹性．故需求弹性 η 近似的表示价格为 P 时，价格变动 1%，需求量就会变化 $\eta\%$．

2．供给弹性

供给弹性通常指的是供给的价格弹性．设供给曲线为 $Q=f(P)$，则**供给弹性**为

$$E_P=\frac{P}{Q}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} .$$

经济意义：当价格为 P 时，价格每上涨 1%，供给量就会下降 $E_P\%$ ．

例 2.6.7 设某产品的供给函数为 $Q=2+3P$，求供给弹性函数及当 $P=4$ 时的供给弹性．

解 $E_P=\dfrac{P}{Q}\cdot\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\dfrac{3P}{2+3P}$，当 $P=4$ 时，$E_P=\dfrac{3\times4}{2+3\times4}=\dfrac{12}{14}\approx0.86$.

即当价格 $P=3$ 时，价格每上涨 1%，供给量就会上升 0.86% .

3．收益弹性

收益的价格弹性：$\dfrac{ER}{EP}=\dfrac{P}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}$；收益的销售弹性：$\dfrac{ER}{EQ}=\dfrac{Q}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}$.

例 2.6.8 设 R、P、Q 分别为销售总收益，商品价格，销售量，试分别求出收益的价格弹性 $\dfrac{ER}{EP}$，收益的销售弹性 $\dfrac{ER}{EQ}$ 与需求的价格弹性 η 的关系.

解 设 $Q=f(P)$，$R=PQ$，故

$$\frac{ER}{EP}=\frac{E(PQ)}{EP}=\frac{P}{PQ}\cdot\frac{d(PQ)}{dP}=\frac{1}{Q}\left(Q+P\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)$$

$$=1+\frac{Q}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=1-\left(-\frac{Q}{P}\cdot\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\right)=1-\eta,$$

$$\frac{ER}{EQ}=\frac{E(PQ)}{EQ}=\frac{P}{PQ}\cdot\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q}=\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}(PQ)}{\mathrm{d}Q})$$

$$=\frac{1}{P}\left(P+Q\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}\right)=1-\left(\frac{1}{-\frac{P}{Q}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}Q}}\right)=1-\frac{1}{\eta}.$$

例 2.6.9 某商品的需求量 Q 关于价格 P 的函数为 $Q=75-P^2$.

（1）求 $P=4$ 时的需求的价格弹性，并说明其经济意义；

（2）$P=4$ 时，若价格提高 1%，总收益是增加还是减少，变化百分之几？

解 （1）$\eta=-\dfrac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}\times\dfrac{P}{Q}=-(-2P)\times\dfrac{P}{75-P^2}=\dfrac{2P^2}{75-P^2}$，$P=4$ 时，$\eta=0.54$.

其经济意义是：$P=4$ 时，价格上涨（下降）1%，需求量就会减少（增加）0.54%.

（2）由例 2.6.8 可知 $\dfrac{ER}{EP}=\dfrac{P}{R}\cdot\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}=1-\eta$，故 $\dfrac{ER}{EP}=1-\eta(4)=0.46$.

即当价格上涨 1% 时，总收益增加 0.46%.

习题 2.6

1．设某商品的总收益 R 关于销售量 Q 的函数为

$$R(Q)=104Q-0.4Q^2.$$

求：（1）销售量为 Q 时的边际收益；

（2）销售量 $Q=50$ 个单位时总收入的边际收益；

（3）销售量 $Q=100$ 个单位时总收入对 Q 的弹性.

2．某商品的价格 P 关于需求量 Q 的函数为 $P=10-\dfrac{Q}{5}$，求：

（1）总收益函数、平均收益函数和边际收益函数；

（2）当 $Q=20$ 个单位时的总收益、平均收益和边际收益.

3．设某商品的需求函数为 $Q=\mathrm{e}^{-\frac{P}{5}}$，求：

（1）需求弹性函数；

（2）$P=3,5,6$ 时的需求弹性，并说明其经济意义.

4．某厂每周生产 Q 单位（单位：百件）的产品，产品的总成本 C（单位：千元）是产量的函数 $C=C(Q)=100+12Q-Q^2$，如果每百件产品销售价格为 4 万元，试写出利润函数及边际利润为零时每周产量.

5. 设某商品的供给函数为 $Q=4+5P$，求供给弹性函数及 $P=2$ 时的供给弹性.

6．某企业生产一种商品，年需求量是价格 P 的线性函数 $Q=a-bP$，其中 a，$b>0$，试求：

（1）需求弹性；

（2）需求弹性等于1时的价格.

复习题二

1．判断下列命题是否正确？为什么：

（1）若 $f(x)$ 在 x_0 处不可导，则曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_0,f(x_0))$ 点处必无切线；

（2）若曲线 $y=f(x)$ 处处有切线，则函数 $y=f(x)$ 必处处可导；

（3）若 $f(x)$ 在 x_0 处可导，则 $|f(x)|$ 在 x_0 处必可导；

（4）若 $|f(x)|$ 在 x_0 处可导，则 $f(x)$ 在 x_0 处必可导.

2．求下列函数 $f(x)$ 的 $f'_-(0)$、$f'_+(0)$ 及 $f'(0)$ 是否存在：

（1）$f(x)=\begin{cases}\sin x, & x<0,\\ \ln(1+x), & x\geqslant 0;\end{cases}$

（2）$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{1+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$

3．求下列函数的导数：

（1）$y=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$；　　（2）$y=\dfrac{\arctan x}{x}$；

（3）$y=\dfrac{1+x+x^2}{1+x}$；　　（4）$y=x(\sin x+1)$；

（5）$y=\cot x\cdot(1+\cos x)$；　　（6）$y=\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$；

（7）$y=\tan^3(1-2x)$；　　（8）$y=\arccos\sqrt{1-3x}$.

4．求由下列方程所确定的隐函数的导数 $\dfrac{dy}{dx}$：

（1） $ye^x+\ln y=1$；　　（2） $\arctan\dfrac{y}{x}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$.

（3） $y=y(x)$ 由 $e^y-e^{-x}+xy=0$.

5．求由下列函数的微分 dy：

（1） $y=\ln\sin^2 x$ ；　　（2）设 $y=(1+x^2)\arctan x$；

（3） $y=\ln(x^3\cdot\sin x)$；　　（4） $y=\ln^3\sqrt{x}$.

6．利用函数的微分代替函数的增量求 $\sqrt[3]{1.02}$ 的近似值.

7．设某商品的需求函数为 $Q=f(P)=12-\dfrac{P}{2}$，求：

（1）需求弹性函数;

（2） $P=6$ 时的需求弹性;

（3） $P=6$ 时，若价格上涨 1% 时，总收益增加还是减少？将变化多少？

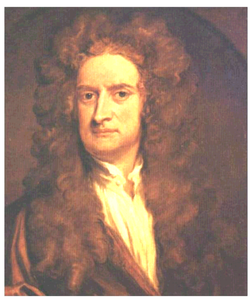
数学家简介——牛顿

自然与自然规律为黑暗隐蔽，
上帝说，让牛顿来！
一切遂臻光明.

——英国诗人蒲柏（杨振宁译）

“如果我之所见比笛卡儿等人要远一点，那只是因为我是站在巨人肩上的缘故.”

——牛顿



牛顿（Isaac Newton）（1643～1727）是英国数学家、物理学家、天文学家．1643 年 1 月 4 日生于英格兰林肯郡的伍尔索普；1727 年 3 月 31 日卒于伦敦．牛顿出身于农民家庭，幼年颇为不幸：他是一个遗腹子，又是早产儿，3 岁时母亲改嫁，把他留给了外祖父母，从小过着贫困孤苦的生活．牛顿在条件较差的地方学校接受了初等教育，中学时也没有显示出特殊的才华．1661 年牛顿考入剑桥大学三一学院，由于家庭经济困难，学习期间还要从事一些勤杂劳动以减免学费．牛顿学习勤奋，并有幸得到著名数学家巴罗教授的指导，认真钻研了伽利略、开普勒、沃利斯、笛卡儿、巴罗等人的著作，还做了不少实验，

打下了坚实的基础，1665 年牛顿获学士学位．1665 年，伦敦地区流行鼠疫，剑桥大学暂时关闭．牛顿回到伍尔索普，在乡村幽居的两年中，终日思考各种问题、探索大自然的奥秘．他平生三大发明，微积分、万有引力定律、光谱分析，都萌发于此，这时他年仅 23 岁．后来牛顿在追忆这段峥嵘的青春岁月时，深有感触地说："当年我正值发明创造能力最强的年华，比以后任何时期更专心致志于数学和科学．"并说："我的成功当归功于精力的思索．" "没有大胆的猜想就作不出伟大的发现．"1667 年，他回到剑桥攻读硕士学位，在获得学位后，成为三一学院的教师，并协助巴罗编写讲义，撰写微积分和光学论文．他的学术成就得到了巴罗的高度评价．例如，巴罗在 1669 年 7 月向皇家学会数学顾问柯林斯（Collins）推荐牛顿的《运用无穷多项方程的分析学》时，称牛顿为"卓越天才"．巴罗还坦然宣称牛顿的学识已超过自己，并在 1669 年 10 月把"卢卡斯教授"的职位让给了牛顿，牛顿当时年仅 26 岁．

牛顿发现微积分，首先得助于他的老师巴罗，巴罗关于"微分三角形"的深刻思想，给他极大影响；另外费马作切线的方法和沃利斯的《无穷算术》也给了他很大启发．牛顿的微积分思想（流数术）最早出现在他 1665 年 5 月 21 日写的一页文件中．他的微积分理论主要体现在《运用无穷多项方程的分析学》、《流数术和无穷级数》、《求曲边形的面积》三部论著里．

牛顿上述三个论著是微积分发展史上的重要里程碑，也为近代数学甚至近代科学的产生与发展开辟了新纪元．正如恩格斯在《自然辩证法》中所说："一切理论成就中未必再有像 17 世纪后半期微积分的发明那样被看作人类精神的最高胜利了．"

由于牛顿对科学作出了巨大贡献，因而受到了人们的崇敬：1688 年当选为国会议员，1689 年被选为法国科学院院士，1703 年当选为英国皇家学会会长，1705 年被英国女王封为爵士．牛顿的研究工作为近代自然科学奠定四个重要基础：他创建的微积分，为近代数学奠定了基础；他的光谱分析，为近代光学奠定了基础；他发现的力学三大定律，为经典力学奠定了基础；他发现的万有引力定律，为近代天文学奠定了基础．1701 年莱布尼茨说："纵观有史以来的全部数学，牛顿做了一半多的工作．"而牛顿本人非常谦虚并在临终前说："我不知道世人对我怎样看法，但是在我看来，我只不过像一个在海滨玩耍的孩子，偶尔很高兴地拾到几颗光滑美丽的石子或贝壳，但那浩瀚无涯的真理的大海，却还在我的前面未曾被我发现．"

牛顿终生未娶．他死后安葬在威斯敏斯特大教堂之内，与英国的英雄们安葬在一起．当时法国大文豪伏尔泰正在英国访问，他看到英国的大人物们都争抬牛顿的灵柩时感叹地评论说："英国人悼念牛顿就像悼念一位造福于民的国王．"牛顿是对人类科学做出卓越贡献的巨擘，得到了世人的尊敬和仰慕．牛顿墓碑上拉丁语墓志铭的最后一句是："他是人类的真正骄傲，让我们为之欢呼吧！"